

整数量子ホール効果の簡単な説明

2007年6月 岡本 徹

はじめに

手っ取り早く、整数量子ホール効果をわかったような気になってもらうために資料を作製した。3年生以上程度の学部学生を想定している。量子ホール効果の解説書を読んで理解する学力（大学院生？）があれば、良書がたくさんあるのでそちらをお薦めする。

1. ホールバー試料

多くの場合、量子ホール効果は2次元電子系（あるいは2次元正孔系）を図1のように加工したホールバーと呼ばれる形状をした試料を用いて測定される。試料幅が $10\mu\text{m}$ から $100\mu\text{m}$ 程度のもものが多く使われる。端子1,4を用いて x 方向に電流 I_x を流す。電流密度はチャンネル幅 w を用いて $j_x = I_x/w$ と表される。 x 方向の電場は端子2,3間、あるいは6,5間の電位差（通常等しい） V_x から $E_x = V_x/l$ として得られる。 l は端子間の距離である。試料に垂直に磁場がかかっているときには、端子2,6間、あるいは3,5間にも電位差が生じる。これをホール電圧（ $V_H = V_y$ ）と呼ぶ。ホール電場、すなわち y 方向の電場は、 $E_y = V_y/w$ である。こうして、対角抵抗率 $\rho_{xx} = E_x/j_x$ とホール抵抗率 $\rho_{yx} = E_y/j_x$ が測定されることになる。電流とホール電圧がどちらも試料幅に比例するため、ホール抵抗率はホール抵抗 $R_H = V_H/I_x$ と等しい。異方性がない場合には、 $\rho_{yy} = \rho_{xx}$ 、 $\rho_{xy} = -\rho_{yx}$ である。伝導率テンソルは、抵抗率テンソルの逆テンソルとして、 $\sigma_{xx} = \rho_{xx}/(\rho_{xx}^2 + \rho_{yx}^2)$ 、 $\sigma_{xy} = \rho_{yx}/(\rho_{xx}^2 + \rho_{yx}^2)$ と求まる。なお、磁場中では、電流電極付近では電流は x 方向と平行でないで、正確な測定を行うためには電流電極と電圧端子との距離を試料幅と比べて十分に長く取る必要がある。

2. ホール効果（飛ばしても良い）

古典的なホール効果を簡単に考えてみよう。キャリアの電荷を q （正孔なら $q = +e$ 、電子なら $q = -e$ ）、面密度を N_s とすると、キャリアの速度

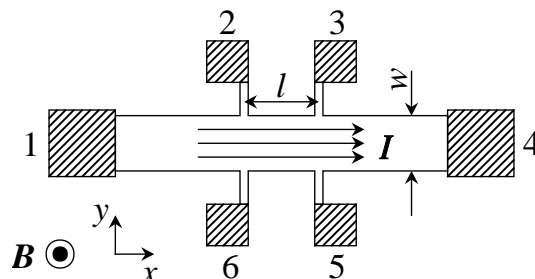


図1. 典型的なホールバー試料。電極1,4を用いて電流を流し、縦抵抗とホール抵抗を測定する。

v_x と電流密度 j_x との関係は、 $v_x = j_x/qN_s$ と書ける。磁場中ではローレンツ力を受けてキャリアの運動は曲げられる。これにより図1の上下方向に分極が生じ、片方のチャンネル端ではキャリアが過剰に、反対側では不足状態になる。結局、定常状態では、この分極による電荷が作る電場による力とローレンツ力が釣り合うことによってキャリアは x 方向に進むので、 $qE_y = qv_x B_z$ となる。そして、 $\rho_{yx} = E_y/j_x = B_z/qN_s$ となる。一方、対角抵抗率（縦抵抗率）はさまざまな要因によって変化し得るが、変化量は大きくないことが多い。

3. 整数量子ホール効果とは

低温・強磁場下においてランダウ準位が明瞭になってくると、ホール抵抗 $R_H (= \rho_{yx})$ と磁場との比例関係は成り立たず、ホール抵抗が量子化され一定の値をもつ領域（プラトー）が観測されるようになる。量子化ホール抵抗の値が、 h/e^2 （ h はプランク定数、 e は素電荷）を整数 i で割った値になる現象が整数量子ホール効果である（1985年のノーベル物理学賞）。量子化ホール抵抗の値が物質の種類に依存しないことは、 10^{-9} 以下の精度で確かめられており、量子化ホール抵抗は抵抗標準として採用されている。図2に測定例を示す。ホール抵抗が量子化されるときには、同時に、 ρ_{xx} が消失している。すなわち、電場と電流が完全に直交した状態になっている。電場の方向に電流が流れ

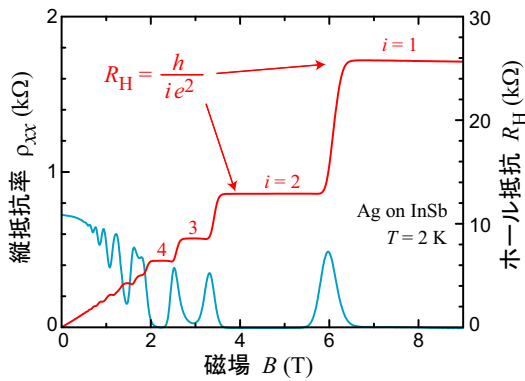


図2. 整数量子ホール効果の測定例. $i = 1 \sim 4$ の量子ホールプラトーが観測されている。

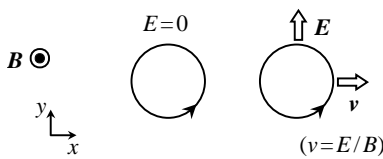


図3. 磁場中のサイクロトロン運動. 電場がかかると、電場に垂直な方向の等速運動が加わる。

ない ($\sigma_{xx} = 0$) ので絶縁体のようでもあるし、電流の方向に電圧降下がない ($\rho_{xx} = 0$) ので超伝導のようでもある。どうしてこのような現象が起こるのか、考えてみよう。

4. サイクロトロン運動とランダウ準位

高校で習ったと思うが、磁場中の電子はサイクロトロン運動と呼ばれる円運動を行う。その周波数は、 $\omega_c = eB_z/m^*$ とかける。物質中の電子の運動を表す有効質量 m^* を用いている。この式は遠心力とローレンツ力の釣り合いを考えれば簡単に導ける。次に y 方向に電場をかけると、電子はサイクロトロン運動を行いながら、その中心は x 方向に $v_x = E_y/B_z$ の速度で移動する (図2)。成分に分けて運動方程式を立てれば解けるが、電場の力をローレンツ力で打ち消すように動いていると考えれば良い。サイクロトロン運動の部分を除くと、電子は電場と直交する向きに、言い換えると、等ポテンシャル線に沿って進むことがわかる。

原子核のまわりをくるくるまわる電子のエネルギーがとびとびの値を取るように、磁場中のサイクロトロン運動のエネルギーもランダウ準位と呼

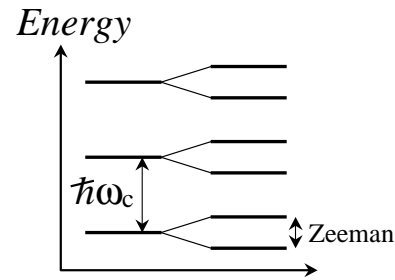


図4. 理想的な2次元系におけるランダウ準位. $(n + 1/2)\hbar\omega_c$ にゼーマンエネルギー $\pm \varepsilon_Z/2$ が加わる。

ばれるとびとびのエネルギー準位に量子化され、

$$\varepsilon = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \quad (1)$$

と書ける (補遺)。ここで、 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ はランダウ量子数である。電場がある場合には、波動関数の中心座標におけるポテンシャルエネルギーと中心運動のエネルギーがこれに付け加わる。電子はスピン $1/2$ を持っているので、磁場と平行な場合と反平行な場合とで磁気モーメントに由来するエネルギー ε_Z (ゼーマンエネルギー) が異なる。 $\hbar\omega_c$ も ε_Z も磁場に比例するが、多くの場合、 $\hbar\omega_c > \varepsilon_Z$ であり、 $\mathbf{E} = 0$ のときランダウ準位は図4のようになる。なお、 $\hbar\omega_c$ は垂直磁場 B_z に、 ε_Z はトータル磁場 B_t に比例するので、角度を調節して、大小関係を逆転させることも可能である。以下では、磁場は2次元面に垂直であるとして、 $B = B_z$ とする。

一本のランダウ準位に収容できる電子の数は、単位面積あたり eB/h である (補遺)。電子密度 N_s をこれで割ったもの $\nu = N_s/(eB/h)$ をランダウ準位充填率と呼ぶ。磁場中の2次元電子の状態を表す最も重要なパラメーターである。実際に ν を変化させるためには、ゲート電極を用いて N_s を連続的に制御するか、 B を変えてやればよい。後者の方法が多く用いられる。絶対零度においては、エネルギーの低いランダウ準位充填率から電子が収容されていくが、図5に磁場の変化とともに電子のランダウ準位充填率が変化する様子を示す。

5. 整数量子ホール効果の解釈

整数量子ホール効果は、 $\nu = i$ (i は整数)、すなわち電子がランダウ準位何本かにぴったり詰まっ

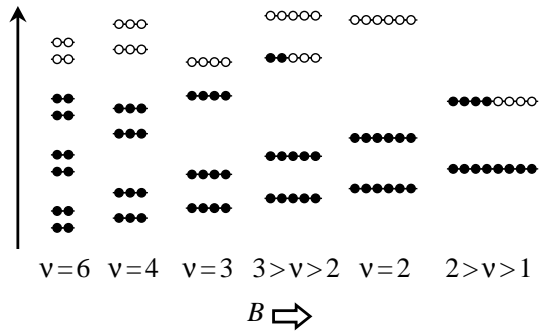


図5. 磁場を増加させていくと、ランダウ準位間隔が広がると同時に、一本のランダウ準位に収容できる電子の数も増え、ランダウ準位充填率 $\nu = N_s/(eB/h)$ は減少する. 整数量子ホール効果は、 ν が整数値をとる磁場を中心とて起こる.

た状態を中心として起こる. 詰まった準位と空の準位との間にギャップがあることが重要なのだが、ギャップが温度や不規則ポテンシャルによる準位のボケに負けてしまうと観測されなくなる. ギャップが大きくなる高磁場で観測されやすく、また同じ磁場なら ϵ_Z に対応する $\nu = \text{奇数}$ よりも $\hbar\omega_c$ に対応する $\nu = \text{偶数}$ で観測されやすい.

量子ホール効果を理解するためには、試料中の不規則ポテンシャルを考える必要がある. 図6 (a) は、不純物等の効果によってできたポテンシャルの山や谷の概念図である. ホールバーを用いた測定から得られる抵抗率や伝導率は、無数の山や谷を含んだ2次元系をマクロに観測したときの平均的な量だと考えれば良い. 但し、ポテンシャルの変化は、サイクロトロン運動の波動関数の広がり $l = \sqrt{\hbar/eB}$ (磁気長と呼ばれる) よりも十分に緩やかであるとする. 電子は等高線に沿って運動するので、山や谷の閉じた等高線に捕まった電子は局在することになる. 電子が捕まった等高線の高さの違いによってランダウ準位は広がりをもつことになるが、上側の裾野が山に、下側の裾野が谷に対応する (図7 (b)).

まず、 $\nu = i$ の場合に、 σ_{xx} および ρ_{xx} がゼロになる (\mathbf{E} と \mathbf{j} が直交する) ことを示そう. $\nu = i$ では、すべての場所において i 番目のランダウ準位まで隙間なく満たされており、電子密度は ieB/h で完全に一様である. 従って、別の等高線に飛び移ろうとしてもすでに埋まっているので、状態間の遷移が許されない. 外部から一様な電場を加えた

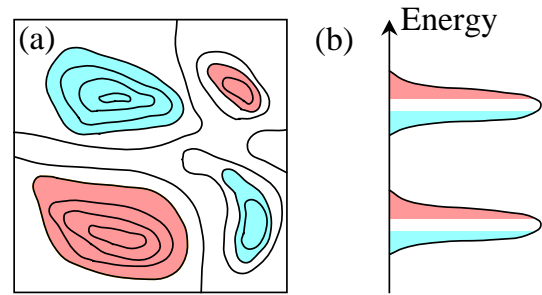


図6. (a) 磁場中におかれた試料中では、電子は不規則ポテンシャルの等高線に沿って運動すると考える. 赤が山、青が谷を示す. (b) 電子が捕まった等高線の高さの違いからランダウ準位に広がりが生じるが、上下の裾野は山や谷に強く局在した状態に対応する.

としても、電子はポテンシャルエネルギーを変えることができないので、電場の方向には電流は流れない. 従って、外部電場と電流は直交する. 当然、単位面積あたりのジュール発熱 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ はゼロである.

次に、 $\nu = i$ において、外部から加えた電場によって、 y 方向に d だけ離れた試料中の2点 $(\xi, 0)$ 、 (ξ, d) の間に電位差 V が生じたときに、2点を結ぶ直線を横切る電流 I を考えよう. 不規則ポテンシャルによって $E_y(\xi, y)$ は一定ではないが、とにかく、 $V = \int_0^d E_y(\xi, y) dy$ である. 電流 I は $\int_0^d j_x(\xi, y) dy$ であるが、電場方向には電流は流れないので E_x による寄与はなく、 E_y のみにより生じる. 電子密度が ieB/h であることと、電子の速度の x 成分が $v_x(\xi, y) = E_y(\xi, y)/B$ で与えられることから、各点で $j_x(\xi, y) = (ie^2/h)E_y(\xi, y)$ が成り立つ. 従って、 $I = (ie^2/h)V$ 、 $V/I = h/ie^2$ となる. $E_y(\xi, y)$ と $j_x(\xi, y)$ はいろいろな値を取り得るが、 j_x/E_y はどこでも同じであるため、マクロな観測から得られた $E_y = V/d$ と $j_x = I/d$ との比も同じになる.

それでは、 $\nu \neq i$ のときを考えよう. 例えば、 $\nu = i$ の状態にわずかの電子を加えたとすると ($\nu > i$)、加えられた電子はポテンシャルの谷底に捕まり局在する. 局在した電子は伝導に寄与しないので、観測される電流と電圧との比は $\nu = i$ の場合と変わらない. 外部から印加した電流はすべて非局在領域を流れると考えて良く、この領域における伝導率 (抵抗率) が全体の伝導率 (抵抗率) を決定す

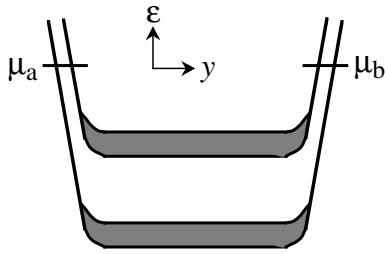


図7. 図1のようなホールバーを y 方向に切ったときのエネルギー断面図. $\nu = 2$ の状態に対して描いたもの.

る。前段落の積分に戻ると、等ポテンシャル線に囲まれた局在領域内での $E_y(\xi, y)$ の積分はゼロになり、また電子が局在しているわけだから $j_x(\xi, y)$ も積分すればゼロであるので、積分区間を非局在領域だけにとれば良い。温度を少し上げると、電子が余分に詰まっている部分とそうでない領域との境界がぼやけ、状態間の遷移が許されるようになるが、ぼやけが非局在領域まで広がらない限りマクロな電気伝導に影響はなく、量子ホール効果は観測され続ける。 $\nu = i$ の状態から山の頂上付近の電子を取り去った場合 ($\nu < i$) についても同様に考えれば良い。こうして、量子ホールプラトーが $\nu \neq i$ の両側に広がるのが理解できる。(プラトーの幅は温度の上昇とともに狭くなる。)

このように、量子ホール効果が幅をもって成立することを理解する上ではランダウ準位の上下の裾野にできた局在状態が重要である。ここでは、磁気長 $l = \sqrt{\hbar/eB}$ よりもポテンシャルの変化が十分に緩やかな場合について考えたが、そうでない場合の議論は簡単ではなく、数値計算に頼ることになるらしい。その場合でも、ランダウ準位の上下に局在状態ができるそうである。

6. チャンネルのはしっこを流れる電流

前節の議論では、チャンネルの端の効果を考えていなかった。図1のようなホールバーの中央付近でのエネルギー断面図を考えよう。チャンネルの端ではポテンシャルが急速に上昇しており、図7のようになっていると考えられる。端の影響のない試料内側（以下、バルクと呼ぶ）の領域のランダウ準位充填率が整数の場合について考えよう（図7では $\nu = 2$ ）。電子はそれぞれの端において化学ポテン

シャル μ_a または μ_b まで詰まっているが、ポテンシャル勾配中におかれた試料端付近の電子は x 方向に電流を運ぶことになる。電流方向は2つの端で逆であり、 $\mu_a = \mu_b$ であれば相殺され、チャンネルを流れる電流の和はゼロになる。しかし、 $\mu_a \neq \mu_b$ の場合、仮にバルク内の平均電場がゼロであっても、両端の電位差 $V_{ab} = (\mu_a - \mu_b)/e$ に比例した電流 $I = (ie^2/h)V_{ab}$ が両端の電流の差として生じる（前節の計算を応用すれば良い）。これは量子化ホール抵抗に他ならない。

実際には、バルク部分のポテンシャルも傾き、2つの端に与えた電位差の一部を受け持つと考えられる。エッジもバルクも電位差に対する電流の比は ie^2/h であるから、チャンネルに流れる電流がどのように振り分けられても量子ホール効果は成立する。エッジ描像は、微少電流領域で行われた数々の実験結果を非常に良く説明する。一方、電流が大きくなり、両端の化学ポテンシャルの差が準位間隔を大きく凌駕する領域でも整数量子ホール効果は観測されている。この場合、エッジだけでは電位差を受け持つことはできず、電流の大部分はバルクを流れていると考えて良いだろう。

補遺：ランダウ量子化（後回しでよい）

磁場中の2次元電子のハミルトニアンは、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて、

$$H = \frac{1}{2m^*} [-i\hbar\nabla + e\mathbf{A}]^2 \quad (2)$$

と書ける（とりあえずそういうものだと思おう）。

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 、すなわち $B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ となる \mathbf{A} の選び方はいろいろあるが、 $\mathbf{A} = (-By, 0)$ をとる。すると、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eBy \right)^2 \quad (3)$$

と書ける。 x 方向にはポテンシャルがなく自由に動けるので、波動関数 $\psi(x, y)$ を y 方向の波動関数 $\chi(y)$ と x 方向の平面波との積として、

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \exp(ik_x x) \chi(y) \quad (4)$$

とおく。ここで、 L_x は系の x 方向の長さである。 y 方向のシュレディンガー方程式は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2m^*} (eBy - \hbar k_x)^2 \right] \chi(y) = \varepsilon \chi(y) \quad (5)$$

となり調和振動子の形をしていることがわかる。実際、 $\omega_c = eB/m^*$ 、 $Y = \hbar k_x / eB$ を用いれば、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 (y - Y)^2 \right] \chi(y) = \varepsilon \chi(y) \quad (6)$$

と書き換えることができる。量子力学の講義で習ったと思うが、エネルギー固有値は式(1)になる ($\varepsilon = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ 、 $n = 0, 1, 2, \dots$)。固有関数 $\chi_n(y - Y)$ は、 Y を中心に長さ $l = \sqrt{\hbar/m^*\omega_c} = \sqrt{\hbar/eB}$ 程度だけ広がっている。 l は磁気長 (magnetic length) と呼ばれている。

同じ固有エネルギーをもつ状態の数を考えよう。 x 方向に周期的境界条件をとると、

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x \quad (n_x \text{ は整数}) \quad (7)$$

となる。従って、 $Y = (\hbar/eBL_x)n_x$ となる。隣の状態とは $\Delta Y = \hbar/eBL_x$ だけ中心がずれていることになる。 y 方向の幅 L_y に含まれる状態数を数えると、 $L_y/\Delta Y = (eB/\hbar)L_x L_y$ となる。従って、1本のランダウ準位に詰め込むことができる単位面積あたりの状態数は、 eB/\hbar である。

ここで、ゼロ磁場との対応を考えてみよう。スピン自由度を無視すると、ゼロ磁場の状態密度は

$D = m^*/2\pi\hbar^2$ と書ける。これに $\hbar\omega_c = \hbar eB/m^*$ をかけると eB/\hbar になる。したがって、 $n\hbar\omega_c \leq \varepsilon < (n+1)\hbar\omega_c$ のエネルギー範囲にある状態が、 $\varepsilon = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$ のランダウ準位に束ねられたと考えると勘定が合う。スピンを考える場合は、それぞれのスピンの向きに対して、詰め替えを行えばよい。

次に、 y 方向に電場がある場合について考えよう。電場がないときには、同じ n をもつ固有状態は縮退しており、ベクトルポテンシャルを $B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ を満たす範囲で自由にとってよかった。 $\mathbf{A} = (-By, 0)$ ととったのは、ポテンシャルエネルギー $+eEy$ がハミルトニアンに加わった場合でも容易に解くことができるようにするためである。ちょっと計算すればわかるが、中心座標は $Y = \hbar k_x / eB - m^* E / eB^2$ となり、固有エネルギーに $+eEY + \frac{1}{2} m^* (E/B)^2$ が付け加わる。

x 方向の速度を表す演算子は

$$v_x = \frac{1}{m^*} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x \right) \quad (8)$$

である。期待値は、

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{m^*} \int \psi^* (\hbar k_x - eBy) \psi dx dy \quad (9)$$

$$= \frac{\hbar k_x}{m^*} - \frac{eB}{m^*} \int \psi^* y \psi dx dy \quad (10)$$

$$= \frac{\hbar k_x}{m^*} - \frac{eB}{m^*} Y \quad (11)$$

$$= \frac{E}{B} \quad (12)$$

となり、古典的な考察から得た結果と一致することが確認できた。